Всероссийская олимпиада школьников по математике.

I этап 7 класс 14.10.2020

Работа рассчитана на 120 минут

1. Три пирата поделили между собой добычу – мешок монет. Первый пират взял себе 3/7 всех монет, второй – 52% остатка. Остальное забрал третий пират. Сколько всего монет было в мешке, если третьему пирату досталось на 4 монеты меньше, чем второму?

2. Знайка взял несколько натуральных чисел и перемножил их. Произведение оказалось равным 1792. Какие числа перемножал Знайка, если самое маленькое из этих чисел было в два раза меньше самого большого? Укажите все возможные варианты. Ответ объясните.

3. Художник Кисточкин нарисовал на листе бумаги 4 квадрата. Размеры всех квадратов различны. Кисточкин покрасил вершины этих квадратов красным цветом. Оказалось, что красных точек меньше одиннадцати. Нарисуйте, как такое могло быть.

4. Можно ли нарисовать восьмиугольник (не обязательно выпуклый) и разрезать его по прямой так, чтобы он распался на пять треугольников?

5. Старуха Шапокляк намазала клеем 55 клеток шахматной доски. Докажите, что Крокодил Гена может поставить на чистые клетки пять коней, которые не бьют друг друга.

6. Сколько целых чисел, больших 100 и меньших 400, имеют в своей записи по крайней мере одну цифру 3?

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

I этап | 8 класс | 14.10.2020

Работа рассчитана на 120 минут

1. Найдётся ли двузначное число, которое при делении на сумму своих цифр даёт в остатке 15?

2. В стране Бинэ 12% жителей не имеют работы. В столице страны ситуация лучше: только 4% жителей не имеют работы. Но в провинции аж 14% жителей безработные. Какой процент жителей страны Бинэ живет в столице?

3. На турнир приехали школьники из разных городов. Один из организаторов заметил, что из них можно сделать 19 команд по 6 человек, и при этом еще менее четверти команд будут иметь по запасному игроку. Другой предложил сделать 22 команды по 5 или 6 человек в каждой, и тогда более трети команд будут состоять из шести игроков. Сколько школьников приехало на турнир?

4. К подножию Горы подошли четыре гнома, которые весят 5, 6, 7 и 9 кг соответственно. Имеется подъемник с одной кабинкой, в которой две скамейки. Кабинка может ездить только с грузом от 10 кг до 25 кг. При этом суммарные массы пассажиров, сидящих на разных скамейках, могут отличаться не более, чем на 3 кг. Пустой кабинка не ездит. Каким образом все гномы могут подняться на Гору?

5. В равнобедренном треугольнике угол при вершине 120°. Доказать, что серединные перпендикуляры к боковым сторонам делят основание на три равных отрезка.

6. Можно ли выписать 2020 различных натуральных чисел, так что при вычёркивании любого из них остальные можно разбить на две группы с равными суммами?

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

I этап | 9 класс | 14.10.2020

Работа рассчитана на 180 минут

1. Изобразить на координатной плоскости точки (x, y), координаты которых одновременно удовлетворяют уравнениям |x|=–y и |y|=x.

2. Пусть p, q, r – простые числа такие, что $(p+1)(q+1)r=pqr+27$. Найти значение произведения pqr.

3. Числа a и b таковы, что $b<a<0$ и $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$. Найти значение выражения $\frac{a+b}{a-b}$.

4. Диагональ AC трапеции ABCD делит угол A пополам. AC=10. Доказать, что BC>5.

5. Можно ли многочлен $x^4+\sqrt{3}x^2+1$ представить в виде произведения многочленов степени меньше 4 с действительными коэффициентами?

6. Числа от 1 до 50 написаны на 50 карточках красного и на 50 карточках синего цвета. Эти сто карточек разложили в семь куч. Всегда ли найдутся два числа такие, что карточки синего цвета, на которых они написаны, находятся в одной кучке, и две карточки красного цвета, на которых они написаны, тоже находятся в одной кучке (кучки для разных цветов могут быть разными)?

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

I этап 10 класс 14.10.2020

Работа рассчитана на 180 минут

1. Участники школьного кружка по робототехнике Леша и Гриша запрограммировали роботов-черепах. Их роботы начали движение в начале песчаной дорожки, двигаясь в одну сторону. Робот Гриши двигался в два раза быстрее, чем робот Леши, но каждый раз пройдя 10 метров, делал остановку на 20 минут. Робот Леши двигался без остановок. Через 2 часа после начала движения робот Леши добрался до конца дорожки одновременно с роботом Гриши, который как раз закончил прохождение очередных 10 метров. Чему равна длина дорожки?

2. Сумма квадратов трёх положительных чисел равна 1. Доказать, что сумма этих чисел больше 1.

3. Можно ли многочлен $x^4+\sqrt{5}x^2+2$ представить в виде произведения многочленов степени меньше 4 с действительными коэффициентами?

4. Может ли десятичная запись суммы попарных произведений трёх последовательных чисел оканчиваться на 2019?

5. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC AB=BD. На стороне CD взята точка E, такая что BE=EC. Доказать, что BE делит диагональ AC пополам.

6. В чемпионате класса по крестикам-ноликам участвуют 21 ученик. В каждом матче встречаются некоторые два ученика, ничьих нет. Ученик, дважды проигравший, прекращает участие в чемпионате. Побеждает один ученик, оставшийся после выбывания остальных. Какое наибольшее количество учеников могло одержать три или больше побед?

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

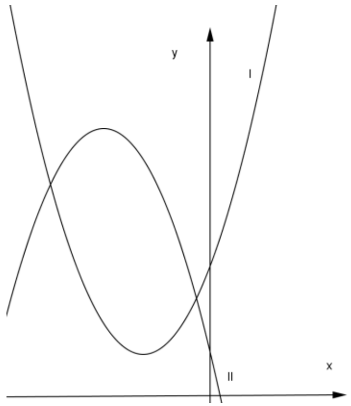
I этап 11 класс 14.10.2020

Работа рассчитана на 180 минут

1. Имеется десять карточек, на которых написаны все десять цифр от 0 до 9. Какое наименьшее натуральное число, кратное 111, можно составить, используя эти карточки (каждая карточка используется не более одного раза)?

2. Решить уравнение $\sin(\pi x)/(4(x-3)^2)+|\sin\pi x|=0$.

3. На рисунке даны изображения графиков двух квадратных трёхчленов $f_1(x)=ax^2+bx+c$ (кривая I) и $f_2(x)=bx^2+cx+a$ (кривая II). Докажите, что хотя бы один из графиков нарисован неверно.



4. На одной улице расположено 6 домов, в которых 3, 5, 10, 12, 13 и 15 жильцов соответственно. Работники ЖЭКа обнаружили, что у каждого жителя найдутся хотя бы три тёзки (люди с одинаковыми именами), проживающие на этой улице. Докажите, что найдутся две тёзки, проживающие в одном доме.

5. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая призма, в основании которой лежит квадрат со стороной 2. Точки K, L, M, N являются серединами рёбер AD, BC, A_1B_1, C_1D_1 соответственно. Точки P и Q лежат на отрезках KM и LN. Докажите, что $PQ \geq \sqrt{2}$.

6. У любых двух незнакомых людей в компании есть ровно двое общих знакомых. Дина и Толя знакомы друг с другом, но не имеют общих знакомых. Докажите, что Дина и Толя имеют одинаковое число знакомых в этой компании.